Relations et fonctions

Produit cartésien

On commence par un petit rappel sur le produit cartésien. Si A et B sont deux ensembles, alors $A \times B$ est le produit cartésien de A avec B. Ce nouvel ensemble est l'ensemble des paires avec un élement dans A et un élément dans B. Avec uniquement des symboles mathématiques, ça donne

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

Du coup, quand je prends $z \in A \times B$, forcément, il existe $x \in A$ et $y \in B$ tels que $z = (x, y)$. Donc, dans l'exercice 2.5, quand tu écris $(x, y) \in A \times (B \cap C)$, ça veut dire que $x \in A$ et $y \in B \cap C$. Donc $y \in B$ et $y \in C$. Puisque $x \in A$ et $y \in B$, on en déduit $(x, y) \in A \times B$.

C'est très important de bien comprendre ce genre de manipulations syntaxique. Pose moi une question si tu n'as pas compris.

Les differents types de relations

Dans le cours, on a vu un certain nombre de propriétées differentes sur les relations. Pour rappel, une relation R sur A et B est un sous ensemble du produit cartésien $R \subseteq A \times B$. *C'est donc un ensemble de paires.* Voici un petit rappel de toutes les propriétées possible sur R quand les ensembles A et B ne sont pas forcément les mêmes:

$$\begin{array}{rll}
\text{Déterministe} & \forall x \in A, \forall y, y' \in B, & (x, y) \in R \wedge (x, y') \in R \rightarrow y = y' \\
\text{Totale à gauche} & \forall x \in A, \exists y \in B, & (x, y) \in R \\
\text{Injective} & \forall x, x' \in A, \forall y \in B, & (x, y) \in R \wedge (x', y) \in R \rightarrow y = y' \\
\text{Surjective} & \forall y \in B, \exists x \in A, & (x, y) \in R
\end{array}$$

Je te rappelle que Application c'est la même chose que Déterministe + Totale à gauche. Et Bijective c'est la même chose que Injective + Surjective.

Une fois que tout ça est bien défini, souviens toi également que si tu as $R \subseteq A \times B$, on a défini la relation inverse $R^{-1} \subseteq B \times A$ par $(x, y) \in R^{-1} \iff (y, x) \in R$. Cela nous permet de voir quelque chose de très interéssant en regardant juste les formules ci-dessus:

- R est Déterministe si et seulement si R^{-1} est Injective.
- R est Injective si et seulement si R^{-1} est Déterministe.
- R est Surjective si et seulement si R^{-1} est Totale à gauche.
- R est Totale à gauche si et seulement si R^{-1} est Surjective.

Incroyable n'est ce pas ? C'est très pratique dans l'exercice 18. En effet, si tu as $f : A \rightarrow B$ qui est une Application Injective, sa relation sous-jacente $f \subseteq A \times B$ possède trois propriétées "de base": Déterministe + Totale à gauche + Injective. Donc sa relation "inverse" f^{-1} possède trois propriétées: Déterministe + Surjective + Injective. Il ne manque que totale à gauche. On peut alors completer f^{-1} en ajoutant des nouvelles paires pour chaque élément dans B qui ne sont pas atteint par f, au prix de l'injectivité. Plus précisement, on prend un $x \in A$ quelconque, et on pose $r = f \cup \{(b, x) \in B \times A \mid \forall a \in A, f(a) \neq b\}$. Je te laisse vérifier que r est toujours Déterministe + Surjective, mais que maintenant elle n'est plus Injective mais Totale à gauche. C'est donc une application surjective.

L'idée est globalement la même pour surjective: on part de f^{-1} pour construire une application qui satisfait nos besoins en rajoutant/enlevant des trucs.