Exercice 1

1. Quelques rares copies ont oublié un des sens de la double inclusion.
2. Quelques copies ont oublié la définition d'extentionalité. Quelques copies n'ont pas compris la définition de produit cartésien. L'ensemble $A \times B$ est l'ensemble des paires avec un élement dans A et un élement dans B.

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\} = \{w \mid \exists x \in A, \exists y \in B, w = (x, y)\}$$

Ce n'est pas la même chose que $\{x \times y \mid x \in A, y \in B\}$ ou encore pire de $\{x.y \mid x \in A, y \in B\}$.

3. Quelques copies ont oublié la question 1.
4. Pareil qu'en 2.
5. Certaines bonnes copies ont remarqué astucieusement que

$$A \otimes B = (A \times A) \cup (A \times B) \cup (B \times A) \cup (B \times B)$$

ce qui permet de dériver directement le résultat. Sinon, il faut bien veiller à traiter tous les cas. Certains ont oublié la question 4 pour la deuxième partie.

6. Bien réussie dans l'ensemble. On fera attention à ne jamais écrire $A = A \times A$.

Exercice 2

Exercice peu traité, bien traité quand il l'était. Bien penser à poser la propriété et indiquer le genre d'induction utilisée.

Exercice 3

1. Question extrêmement simple, a été extremement mal traité. La grande majorité des copies confondent le langage vide $\emptyset$ avec langage qui contient uniquement le mot vide $\{\varepsilon\}$! En effet,

$$L.\{\varepsilon\} = \{w \in A^* \mid \exists u \in L, \exists v \in \{\varepsilon\}, w = u.v\} = \{w \in A^* \mid \exists u \in L, w = u.\varepsilon\} = L$$

mais

$$L.\emptyset = \{w \in A^* \mid \exists u \in L, \exists v \in \emptyset, w = u.v\} = \emptyset$$

De plus, quelques copies confondent automate et langage. Pour chaque automate, on peut associer un langage, mais l'inverse n'est pas vrai (par exemple, $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$)

2b. Bien traitée dans l'ensemble. Personne n'a justifé la construction.

2c. Bien traitée. Personne n'a justifé la construction.

2d. Cette question a été une catastrophe. En raison de la question 1, $L_3 = (a + b^*.\emptyset = \emptyset$, ce qui simplifiait grandement les calculs. D'autres problèmes sont présents:

- Aucune copie ne vérifient leur résultat avec par exemple b.
- Quelques copies continuent d'indiquer L_2 à la place de L_0.
- Quelques copies continuent de croire que la concaténation est commutative: trompe $\neq$ promet, refluer $\neq$ fleurer, gras $\neq$ gars, macaroni $\neq$ marocain.

Voici un programme pour vous convaincre:

```
from collections import defaultdict
d = defaultdict(set)
for w in open('liste_francais.txt').read().split():
    d["".join(sorted(w))].add(w)
print([x for x in d.values() if len(x) > 1])
```

- Très peu de personnes on justifié que l'on pouvait appliquer le lemme d'Arden ($\varepsilon \notin K$). Certains ont même oublié de le citer.

3b. Question difficile et traité correctement uniquement dans les meilleures copies.

- Le lemme de l'étoile tel que vu en TD ne permet pas de résoudre la question: si u est tel que $u = \tilde{u}$, la boucle donnée par le lemme de l'étoile peut toujours être centrée sur le millieu de u. Par exemple si $aabaa \in L$ alors $a(aba)^*a$ est toujours dans L.
- Beaucoup de copies n'ont pas compris que l'on pouvait introduire le mot après que N soit défini. Pour rappel, la formule du lemme de l'étoile est :

$$L \in \mathrm{Rat} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists N \in \mathbb{N}, \forall w \in L, \exists xyz \in A^*, w = xyz \wedge xy^*z \in L$$

Exercice 4

Bien traité dans l'ensemble. Quelques confusions entre formule logique et fonction booléennes. Attention également aux définitions FND/FNC/satisfiable/valide. On aurait pu remarquer que $I(F) = f(I(p), I(q), I(r))$ dans les questions 2.c, 2.d et 2.e.