Définition de l'induction bien fondée

Passons maintenant à la définition de l'induction bien fondée. Pour bien expliquer le concept, je vais reprendre l'induction sur $\mathbb{N}$. On dit qu'une propriété P sur $\mathbb{N}$ est inductive si $P(0)$ est vraie, et $\forall n, P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Le principe d'induction sur $\mathbb{N}$ te dit que si P est inductive, alors $\forall n, P(n)$.

Prenons un exemple. Supposons que tu veux montrer $P(5)$. On sait que $P(0)$ est vraie. Puisque $P(0) \Rightarrow P(1)$, on peut en déduire $P(1)$. Puisque $P(1) \Rightarrow P(2)$, on peut en déduire $P(2)$. On continue pour montrer $P(3)$, puis $P(4)$ et finalement $P(5)$. Le raisonnement est le même pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut alors en déduire que $\forall n, P(n)$.

Le problème, c'est que ce raisonnement n'est pas très "propre". Pour faire la preuve de manière plus élégante, il faut prendre l'ensemble des éléments de $\mathbb{N}$ tels que la propriété est fausse :

$$X = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ est faux}\}$$

Tu veux montrer que X est vide. On suppose donc par l'absurde qu'il ne l'est pas. Si tu prends un x dans X quelconque, tu sais que $P(x)$ est faux, mais il est possible que $P(x-1)$ le soit aussi, et même chose pour $P(x-2)$, ... $P(x-n)$. Tu es bloqué.

Cependant, si tu prends x dans X comme un élément minimal, deux possibilités apparaissent. Si $x = 0$, alors $P(0)$ est vraie (puisque P est inductive) et $P(0)$ est fausse (puisque $0 \in X$). Absurde ! Si $x = n + 1$, alors $n \notin X$, donc $P(n)$ est vraie. Puisque P est inductive, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Donc $P(x)$ est vraie, mais $x \in X$, donc $P(x)$ est fausse. Absurde ! Donc X est vide.

L'idée de l'ordre bien fondé est d'avoir un ensemble ordonné où cette preuve fonctionne. La seule propriété que j'ai utilisée est que si X est non vide, alors il admet un élément minimal.

> **Définition 1** (Bien fondé): Un ensemble ordonné $(A, \leq)$ est dit bien fondé si pour tout $X \subseteq A$, si X est non vide, alors il a un élément minimal.

On peut alors généraliser la définition de propriété inductive. Une propriété sur A est inductive si $\forall x, (\forall y,\ y < x \Rightarrow P(y)) \Rightarrow P(x)$. Ce que te dit le théorème d'induction bien fondée est que si $(A, \leq)$ est bien fondé, alors $\forall a \in A, P(a)$. La preuve est la même que pour $\mathbb{N}$:

Preuve: Soit $X = \{x \in A \mid \neg P(x)\}$. Si X n'est pas vide, alors il a un élément minimal x. Alors, pour tout $y < x$, $y \notin X$, donc $P(y)$. C'est-à-dire, $\forall y, y < x \Rightarrow P(y)$. Puisque P est inductive, $P(x)$, mais $x \in X$, donc $\neg P(x)$. Absurde ! Donc X est vide. ∎

C'est vraiment exactement la même chose. Pour terminer, voici quelques exemples et remarques :

- Tous les ensembles ne sont pas bien fondés. Par exemple, $(\mathbb{R}, \leq)$ n'est pas bien fondé, $(\mathbb{Q}_+, \leq)$ non plus, $(\mathbb{Z}, \leq)$ non plus.
- Tous les ensembles définis par induction structurelle sont bien fondés pour l'ordre "être un sous-terme".
- La divisibilité sur $(\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, |)$ est bien fondée. Pour le montrer, on peut utiliser l'application monotone $\mathrm{id} : (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, |) \to (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \leq)$ vue plus haut. En effet, soit $X \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ non vide. Alors $\mathrm{id}(X) = X$ admet un élément minimal x pour $\leq$. On va expliciter la preuve que x est un élément minimal pour $|$ également. Si $y \in X$ avec $y \mid x$, alors par monotonie de id, $y \leq x$. Puisque x est élément minimal dans X pour $\leq$, on en déduit que $y = x$. Donc x est bien un élément minimal pour $|$. (C'est la question 3 de l'exercice 2 du partiel 2023).

- Dans le cours, il y a une autre définition du bien-fondé donnée par l'absence de suite infinie décroissante. En fait, on peut passer de l'une à l'autre, et c'est un théorème du cours. L'idée est que si tu as une suite infinie décroissante $u : \mathbb{N} \to A$, alors l'ensemble de ses éléments $\{a \in A \mid \exists i, u(i) = a\}$ n'a pas d'élément minimal. Réciproquement, s'il existe X non vide sans élément minimal, alors tu peux fabriquer une suite infinie décroissante : on pose $u(0)$ comme un élément dans X, et si $u(n)$ est défini, on définit $u(n+1)$ comme un élément plus petit que $u(n)$ (il existe puisque sinon $u(n)$ serait un élément minimal).
- Si deux ordres $(A, \leq)$ et $(B, \leq)$ sont bien fondés, alors l'ordre lexicographique $(A \times B, \leq \times_{\text{lex}} \leq)$ est bien fondé.
- L'ordre lexicographique sur les mots n'est pas bien fondé. Exemple de suite infinie décroissante : $a^n b$.

Exercice 1: Soit A un alphabet. Montrer que l'ensemble ordonné des mots avec l'ordre prefixe $\left(A^*, \sqsubseteq_{\text{pre}}\right)$ est bien fondé.